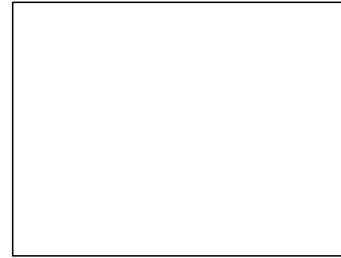


微分積分学 II 試験問題 (2012年2月1日)

氏名 _____

学籍番号 _____



1. 括弧内に示した定義域において、次の二変数関数 $f(x, y)$ の $f(x, y)$ の最大値、最小値を求めたい。

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 + y \quad (x^2 + y^2 \leq 1)$$



- (1) 以下の文章は、定義域の境界 $x^2 + y^2 = 1$ における $f(x, y)$ の最大値と最小値を求める過程を書いたものである。[] を埋めよ。
(イ、ウ、エは各2点、他は各1点、計15点)

境界上の条件を表す関数を $g(x, y) = [ア]$ とする。
極値を与える候補点を (a, b) とすると、 (a, b) は次の連立方程式

$$\begin{cases} [イ] \\ [ウ] \\ [エ] \end{cases}$$

を満たす。これを解くと、 (a, b) は4点あり

[オ], [カ], [キ], [ク]

である。また、二変数関数 $f(x, y)$ は境界上において、

[ケ] で最大値 [コ],
[サ] で最小値 [シ] をとる。

(計算メモ)

- (2) 定義域内部に関数 $f(x, y)$ の極値はあるか。あるならば極値と極値を与える (x, y) の値を求めよ。(5点)



- (3) (1), (2) で得られた結果をもとに、 $x^2 + y^2 \leq 1$ における $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めよ。(5点)



2. 次の二重積分に関する等式が与えられているとき、各領域 D を xy 平面に図示せよ。領域 D の境界点を示す座標 (x, y) も図中に示すこと。(各4点, 計8点)

$$(1) \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 f(x, y) dy \right) dx$$



$$(2) \iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} f(x, y) dx \right) dy$$



3. 二重積分に関して、次の各問に答えよ。((1) 9点 (2) 4点 (3) 9点 計22点)

- (1) 二重積分 $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 2\}$ について、領域 D を xy 平面上に図示せよ。また、二重積分 I を二通りの累次積分で表せ。



(2) 累次積分 $\int_0^2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} x^2 y \, dy \right) dx$ の値を求めよ。

(3) 二重積分 $I = \iint_D \frac{x}{y} \, dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y^2\}$ について、

領域 D を xy 平面に図示せよ。また、与式を累次積分で表し、その値を求めよ。

(累次積分の表し方は二通りあるが、どちらか一方で良い。後の計算の難易を検討し、一方を選択せよ。)

4. 二重積分 $I = \iint_D x \, dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + 2y \leq 2, 0 \leq 2x - y \leq 1\}$ を

次の手順で求めよ。(各5点計20点)

(1) 積分を計算しやすくするために、 (x, y) から (u, v) への正則一次変換による変数変換を行う。このとき、 u, v を x, y を用いた式で表せ。

(2) 変換後の D に対応する積分領域 D' を、 u, v を用いた不等式で表せ。

(3) x, y を u, v を用いた式で表せ。

(4) 二重積分 I の値を求めよ。

5. 二重積分 $I = \iint_D y \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y\}$ を極座標 (r, θ) に変換して求める。このとき次の問に答えよ。(各5点計15点)

(1) D に対応する極座標上の領域 D' を r, θ を用いた不等式で表せ。

(2) Jacobian (ヤコビアン) $J(r, \theta)$ を定義式を用いて求めよ。

(3) 二重積分 I の値を求めよ。

6. 曲面 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ と xy 平面とで囲まれた部分の体積を求めよ。(10点)