

微分積分学 II 中間試験問題 (2008年11月)

氏名 \_\_\_\_\_

学籍番号 \_\_\_\_\_

1. 以下の極限值が存在するか調べ、存在する場合には極限值を求めよ。

(1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-3y}{x+2y}$  (6点)

(2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$  (6点)

2. 次の関数が点  $(0,0)$  で連続となるような定数  $a$  の値は存在するか。そのことを調べ、存在する場合にはその値を求めよ。(10点)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ a & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. 関数  $z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$  の偏導関数  $z_x$ ,  $z_y$  を求めよ。(8点)

4. 関数  $z = e^{-(x^2+y^2)}$  の全微分を求めよ。(7点)

5. 曲面  $z = -x^2 - 2y^2$  の上の点  $(2, 1, -6)$  における接平面の方程式を求めよ。(7点)

6. 関数  $z = f(x, y)$  が全微分可能な関数で、 $x, y$  が  $r, \theta$  の関数

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

であるとき、等式

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (*)$$

が成り立つ。これを、以下の手順にしたがって証明せよ。

- (1) 偏導関数  $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial \theta}$  を求めよ。(各1点、計4点)

(裏面へつづく)

(2) 2変数の合成関数  $z = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$  に対する偏微分の公式、および、問(1)の結果より、 $\frac{\partial z}{\partial r}$  と  $\frac{\partial z}{\partial \theta}$  を、 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $r$ ,  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  を用いて書き表せ。(各4点、計8点)

(3) 問(2)の結果を  $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$  へ代入し、等式(\*)が成り立つことを示せ。(8点)

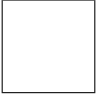
7. 方程式  $x^3 + y^3 = 3xy$  で定まる陰関数に対し、その導関数  $\frac{dy}{dx}$  を求めよ。(7点)

8. 関数  $f(x, y) = \log(1 + x + y^2)$  に対し、以下の問いに答えよ。

(1)  $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$  を求めよ。(各2点、計10点)

(2) 次を求めよ。(各7点、計14点)

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(0,0), \quad \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$$



(3) 関数  $f(x, y)$  の2変数のマクローリン展開を、 $x, y$  の2次の項まで求めよ。(5点)

