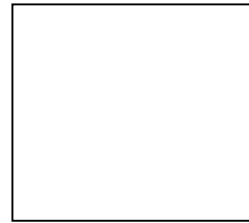


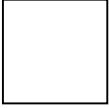
## 微分積分学 II 中間試験(2009 年 11 月)

学籍番号 \_\_\_\_\_

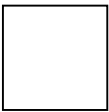
氏名 \_\_\_\_\_



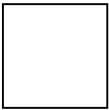
1. 以下の極限が存在するか調べ、存在する場合には極限を求めよ。



(1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}$  (5 点)

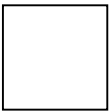


(2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sin(x-y)}{x-y}$  (5 点)



2. 次の関数の偏導関数  $f_x(x, y)$ 、 $f_y(x, y)$  を求めよ。(8 点)

$$f(x, y) = \frac{x^y}{e^x - e^y} \quad (x > 0)$$



3. 次の曲面  $z = f(x, y)$  の点(1,2,4)における接平面の方程式を求めよ。(6 点)

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2$$

4. 次の関数  $z = f(x, y)$  の全微分可能性を調べよ。(6 点)

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

5. 次の合成関数  $F(t) = f(x(t), y(t))$  の導関数を求めよ。(7 点)

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, \quad x(t) = t - 1, \quad y(t) = \frac{2}{t}$$

6. 次の合成関数  $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$  の偏導関数を求めよ。(4 点)

$$f(x, y) = e^x \cos y, \quad x(u, v) = u^2 - v^2, \quad y(u, v) = 2uv$$

7.  $z = f(x, y)$ ,  $x(u, v) = u \cos \alpha - v \sin \alpha$ ,  $y(u, v) = u \sin \alpha + v \cos \alpha$  のとき、次式が成り立つことを示せ。ただし  $\alpha$  は定数とする。(7点)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

8.  $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$  のとき、 $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  が成り立つことを示せ。(7点)

9. 関数  $f(x, y) = e^{2x} \cos 3y$  について以下の問いに答えよ。

(1) 偏微分係数  $f_x(0,0), f_y(0,0), f_{xx}(0,0), f_{xy}(0,0), f_{yy}(0,0)$  をそれぞれ求めよ。(6点)

(2) (1)の結果を利用して、第3次マクローリン展開を求めよ。ただし剰余項は  $R_3(x, y)$  とだけ記し具体的な形は求める必要はない。(4点)

10. 関数  $f(x,y) = e^{x^2+y^2-2y+1}$  について以下の問いに答えよ。

(1) 第2次偏導関数  $f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yy}(x,y)$  をそれぞれ求めよ。(8点)

(2)  $f(x,y)$  の停留点があればすべて求めよ。(4点)

(3)  $f(x,y)$  の極大値または極小値があればすべて求めよ。(6点)

11. 等高線  $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$  から定まる陰関数  $y = \varphi(x)$  について以下の問いに答えよ。

(1) 導関数  $\varphi'(x)$  を  $x, y$  を使った式で表せ。(5点)

(2) 点  $(2,1)$  における接線の方程式を求めよ。(5点)

(3) その点における接線の傾きが(2)の接線と等しくなる別の点が等高線上にある。その点の座標を求めよ。(7点)