

微分積分学I 中間試験問題(2010年6月)

氏名

学籍番号

1. 次の数列・関数の極限を求めよ。(各小問5点)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{3n}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2}{x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 x - \sin^3 x}{x^5}$

2. 関数 $f(x) = (x - 1) + |x - 1|^{\frac{3}{2}}$ について次の問に答えよ。(各小問5点)

(1) 一般の関数 $y = g(x)$ について $x = a$ での連続の定義を書き、それを用いて関数 $y = f(x)$ の $x = 1$ での連続性を調べよ。

(2) 一般の関数 $y = g(x)$ について $x = a$ での微分可能の定義を書き、それを用いて関数 $y = f(x)$ が $x = 1$ で微分可能であることを示せ。

3. 次の問に答えよ。(各小問5点)

(1) 導関数の定義に基づいて、関数 $y = \cos x$ の導関数を求めよ。

(2) 指数関数 $y = e^x$ は対数関数 $y = \log x$ の逆関数であり、また公式 $(\log x)' = \frac{1}{x}$ が成り立つ。これらの事実を用いて $(e^x)' = e^x$ を示せ。

(3) $\sin\left(2 \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ の値を求めよ。

(4) 閉区間 $[-1, 0]$ で定義された関数 $f(x) = 1 + \cos(\pi x^2)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。関数 $f^{-1}(x)$ とその定義域を求めよ。

(5) 関数 $f(x) = \log(2x + 1)$ に対し、4次までの導関数を求め、それに基づいて、 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ の形を推測せよ。

4. 次の関数の導関数を求めよ。(各小問5点)

(1) $f(x) = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $f(x) = x^{\tan x}$

5. 関数 $f(x) = \sin x$ について、以下の問に答えよ。(各小問5点)

(1) 1次導関数と2次導関数を求めよ。それに基づき、 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を推測せよ。

(2) $n = 2m$ および $n = 2m + 1$ に対して $f^{(n)}(0)$ を求めよ。ただし $m = 0, 1, 2, \dots$ である。

(3) 前問の結果を用いて、マクローリン展開を $2m + 1$ 次の項まで求めよ。ただし剰余項を $R_{2(m+1)}$ とせよ。

6. 関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ について、以下の問に答えよ。

(1) 1次導関数 $f'(x)$ を求め、 $f'(x) = 0$ となる x を求めよ。(3点)

(2) 2次導関数 $f''(x)$ を求め、 $f''(x) = 0$ となる x を求めよ。(2点)

(3) 関数 $f(x)$ の増減と凹凸を調べよ。その際、変曲点と極値を明示せよ。(5点)

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ。(5点)

(5) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。(5点)

