確率･統計学標準問題集(2014 年度)

工学部先端材料理工学科

この問題集のレベルの問題を理解して自ら解けるようになると、本授業の内容に習熟したと言える。

第1章

1. $P(A \cup B) = 0.7$、$P(A) = 0.5$、$P(A \cap B) = 0.3$のとき$P(B)$はいくらか。
2. $\Omega = A \cup B \cup C$、$C^C = A \cup B$、$P(C) = 0.3$、$P(A \cap B) = 0.3$のとき$P(A)$が取りうる範囲を不等式で表せ。
3. サイコロを1回振って1から6の目が出る事象をそれぞれ$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$とおく。いま$A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$、$B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$のとき、$A \cap B$と$(A \cup B)^C$を$\omega_i$を用いて表せ。また、$P(A \cup B)$はいくらか。サイコロは正6面体のものを想定し、1から 6 まで 6 つの目が出る確率はそれぞれ$1/6$とみなす。
4. 白玉2個、黒玉3個が入った袋がある。この袋から全ての玉を1個ずつ順に取り出し、袋には戻さない。取り出す際、入っている玉のどれが出てくるかは等しい確率とする。(1) i回目に白玉を取り出すという事象をω_iとする。$P(\omega_1)$、$P(\omega_1{}^C)$、$P_{\omega_1}(\omega_2)$、$P(\omega_3)$をそれぞれ求めよ。(2)どこかで白玉2個が続けて出る確率を求めよ。
5. 男子 6 名、女子 4 名の中から 3 人の委員を選ぶが、男子のみや女子のみとなってはいけない。その選び方は何通りあるか。
6. 同じ形の3枚のカードがある。カードには色がついていて、1枚目は両面とも赤、2枚目は両面とも青、3枚目は片面が青でもう一面は赤である。3枚を袋に入れ、目を閉じて無作為に1枚を袋から取り出し机上に置いた後、目を開けると見えている面は赤であった。この条件の下で、そのカード裏面が赤である確率はいくらか。
7. 三学部から成るある大学の1年生は工学部が 300 人、文学部が 100 人、経済学部が 200 人という。うち女子の割合は工学部が 10%、文学部が 60%、経済学部が 15%だった。この中から無作為に一人を選んだとき、(1)その人が男子である確率はいくらか。(2)もし、その人が女子であったならば、その人が工学部である確率はいくらか。一方、無作為に二人を選んだとき、(3) 二人とも女子である確率はいくらか。

第2章

8. 二個のサイコロを同時に振って出た目の合計を確率変数Xする。(1) 1つの試行で出た目の合計をxとおく。横軸をx、縦軸を確率関数$P(X = x)$としてグラフを描け。(2) 確率分布関数$F(x)$を求めよ。サイコロは正6面体のものを想定し、1から 6 まで 6 つの目が出る確率はそれぞれ$1/6$とみなす。
9. 4問からなるクイズがある。すべてに答えた時に、横軸を正答数x、縦軸をx問正答する確率にとって、確率関数のグラフを描け。各クイズの正答率はすべて$1/3$とする。
10. 一問ずつクイズに答えて 7 問以内に3問正答すると合格とする。合格に要するクイズの数をyとして、横軸をy、縦軸をy問で合格する確率とし、y=0 から 7 までの確率関数のグラフを描け。各クイズの正答率はすべて$1/3$とする。
11. 確率密度関数が$f(x) = \dfrac{1}{x^2}(1 \le x)$、$f(x) = 0(x < 1)$のとき確率分布関数$F(x)$を求め$y = F(x)$のグラフを描け。
12. 確率密度関数が$f(x) = A\sin x \ (0 \le x \le \pi)$、$f(x) = 0 \ (x < 0, x > \pi)$のとき定数$A$はいくらにすべきか。$A$を決めた上で確率分布関数$F(x)$を求め$y = F(x)$のグラフを描け。

13. いまサッカーの試合で各チームの1試合での得点を確率変数 X とおくと、それがポアソン分布 $f(X=n)=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ $(n=0,1,2,3,\ldots)$ するもと仮定する。λ はチームごとに決まる数で、対戦相手等には影響されないとする。$\lambda=1$ のチームと $\lambda=2$ のチームが対戦したなら、$\lambda=1$ のチームが $\lambda=2$ のチームを 0 点に抑えて勝つ確率はいくらか。(2) $\lambda=1$ のチームが5試合で合計 2 点だけ取る確率はいくらか。

14. $\sigma=1$ の正規密度関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(-\infty<x<\infty)$ の曲線に極大や極小、変曲点があれば求めと。そしてグラフを描け。

15. ある年齢の日本人男子から 1 名を選んだならば、その体重が平均 55.0kg、 分散 $\sigma^2=25.0\mathrm{kg}^2$ の正規分布をすると仮定する。このとき(1)体重が上位 4%に入るためにはおよそ何 kg 以上であればよいか。(2) 無作為に 1 名選んだとき、体重が 53kg 未満である確率はいくらか。(3) 無作為に 16 名選んだとき、平均体重が 53kg 未満である確率はいくらか。それぞれの値を有効数字 3 桁の数で表せ。正規分布表(教科書 p.152)も利用せよ。

第3章

16. 一つのサイコロを振って出た目を確率変数 X する。$E(X), E(X^2)$ $V(X)$ をそれぞれ求めよ。サイコロは正6面体のものを想定し、1から 6 まで 6 つの目が出る確率はそれぞれ $1/6$ とみなす。

17. 離散型確率変数 X、$\Omega_X=\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ に関して $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ となることを証明せよ。

18. 確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\dfrac{x}{2}(0\le x\le 2)$、$f(x)=0(x<0, x>2)$ のとき期待値 $E(X)$、分散 $V(X)$、確率分布関数 $F(x)$ を求めよ。

19. ポアソン分布 $f(X=n)=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ $(n=0,1,2,3,\ldots)$ の期待値 $E(X)$ が λ となることを、マクローリン展開 $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ も利用して証明せよ。

20. 確率変数 X の密度関数が $f(t)=Ae^{-2t}$ $(0\le t<\infty)$、$f(t)=0$ $(t<0)$ のとき定数 A はいくらにすべきか。A を決めた上で期待値 $E(X)$ 及び分散 $V(X)$ を求めよ。

21. ある製品を使い始めてから壊れるまでの年数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で表されるとき、使い始めてから4年以上壊れない確率を求めよ。

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ \dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & (x\ge 0)\end{cases}$$

22. 正規密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(-\infty<x<\infty)$ について、$E(X)=\mu$ 及び $V(X)=\sigma^2$ となることを示せ。必要に応じて次の積分公式を使ってよい。$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$ $(a>0)$

23. ガンマ分布(教科書 p.41)で $\alpha=2, \beta=2$ のとき、密度関数 $f(x)$ のグラフを横軸を x として描け。このときの期待値及び分散を求めよ。

24. 1つの硬貨を3回だけ投げる。1回目と2回目の分で表が出た回数を確率変数 X、3回分で表が出た回数を確率変数 Yとする。このとき共分散 $\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)$及び相関係数 $\rho\left(X,Y\right)$を求めよ。それぞれの試行で表が出る確率は$1/2$とする。

第5章

25. 変形した硬貨がある。その表が出る確率を推定するため、硬貨を3回投げる試行を行う。ここでその確率を pとおく。実際に表が出た割合の実現値(例えば 1/3)を推定値 $\hat{x}$とするならば、$\hat{x}$の期待値と標本不偏分散の期待値を、それぞれ pの関数として表せ。

26. n回硬貨を投げたらm回だけ表が出た。最尤法で表が出る確率 pを推定すれば $\hat{p}=\frac{m}{n}$となることを以下の手順で示せ。(1) 尤度関数$L(p)$を nと mを用いて表し、$L(p)$を最大にする pを求める。(2) $L(p)$の代わりに対数尤度関数 $l(p)=\log L(p)$を用いても、同じ結果 $\hat{p}=\frac{m}{n}$となることを示せ。

27. ポアソン分布 $Po(\lambda)$をもつ母集団からn個の標本$(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$を無作為抽出した。最尤法で λを推定すると$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$となることを示せ。

28. 正規分布している母集団から抽出した標本$(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$がある。最尤法で期待値を推定すると標本平均 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$、分散を推定すると標本分散 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2$ となることを示せ。

29. ある規格のネジのうち25本の長さを測定した標本平均 $\bar{x}$は20.00 [mm]、標本不偏分散 vは0.04[mm]となった。これらの値から平均の長さの信頼係数95%の信頼区間を求めよ。ここで母平均の信頼係数$1-\alpha$の信頼区間は$\overline{X}-t\left(n-1;\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{V}{n}}\le\mu\le\overline{X}+t\left(n-1;\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{V}{n}}$で表される。

30. ある飲料の1パックあたりの封入量の均一性を調べるため、20個の標本を抽出し質量を測定したところ平方和 $s=\sum_{i=1}^{20}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=85\,[\mathrm{g}^2]$となった。このとき母分散の信頼率95%の信頼区間を求めよ。母分散の信頼係数 $1-\alpha$の信頼区間は$\frac{s}{\chi^2\left(n-1;\frac{\alpha}{2}\right)}\le\sigma^2\le\frac{s}{\chi^2\left(n-1;1-\frac{\alpha}{2}\right)}$で表される。

31. あるアンケート調査で1000人のうち政党Aを支持する人は80名だった。この値から政党Aの支持率の信頼係数95%の信頼区間を求めよ。ここで事象Aが起こる比率をpとすると、n回の試行のうちAが起こる回数Xは二項分布するが、それを正規分布 $B\left(n,p\right)$で近似でき$1-\alpha\approx P\left(-z_{\alpha/2}\le\frac{X-np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}\le z_{\alpha/2}\right)$が成り立つものとする。$1-\alpha$は信頼係数、$z_{\alpha/2}$は標準正規分布の上側$\alpha/2$点である。

第6章

32. ある野球チームの成績が今のところ10勝4敗であった。簡単にするため、そのチームはすべての試合で一定の率 p_0 で勝てるものとする。いま有意水準を5%にとると、p_0 が5割よりも高いと判断してもいいか。ここでは、試合数が少ないので2項分布を正規分布で近似しないこと。

33. ある年齢の男子の全国平均身長が 150.0cm である。ある市で同年齢の男子 36 人の身長を測定したところ、標本平均が 151.5 cm、標本不偏分散が 25.0cm^2 であった。その市の（調査対象の）男子は同年齢の全国平均よりも身長が高いと言えるか。有意水準を1%にとって検定せよ。身長の値は正規分布するが、母分散は未知の場合として扱う。

34. ある2つの学校A、Bであるときのセンター試験のある科目の自己採点を聞き取り、両校から各 15 名の得点を標本として抽出した結果、A校の標本平均は69.2、B 校の標本平均は65.0だった。得点は正規分布し、その母分散は全受験生の値60に等しいと仮定する。自己採点を見る限り、有意水準5%で判断してA校の出来がＢ校よりも良かったと言えるか。

35. 二つのラインA、Bで規格値 80gの同じ板チョコレートを製造している。質量のバラツキの精度を比べるため、ラインAで 26 個を抜き取って、それらの質量を測定したところ標本不偏分散は 1.61g^2、同様にラインBでは 21 個を抜き取って標本不偏分散は 3.01g^2 となった。このデータから判断して、バラツキに違いがあるかどうか有意水準5%で検定せよ。このとき、不偏分散の比は、F分布にしたがうものとして、教科書 p.103 の公式及び F 分布表を用いよ。

36. 減量に効果があるという食品をモニター数 $n=15$ 名に１ヶ月間毎日食べてもらった。下の表は各人の体重の変化を kg 単位で表したものである。各人の変化を $X_i\ (i=1,2,3,\ldots,n)$ とおくと、その平均 $\bar{X}$ の実現値が−0.39kg だった。つまり、体重は平均して 0.39kg 減った。有意水準 5%で検定し食品が減量に有効であると判断していいか。ここで検定統計量 $\dfrac{\bar{X}}{\sqrt{V/n}}$ は自由度 $n-1$ の t-分布をするものと仮定する。V は標本不偏分散である。

−1.0	−1.0	−0.8	−2.0	0.4	0.5	−1.0	−1.1	1.1	0.5	0.0	0.2	−0.2	−1.0	−0.4

37. 2項分布 $B(n,p)$ は正規分布 $N(np, np(1-p))$ に近似できるものとみなし以下の問いに答えよ。

(1)内閣を支持するかどうか、アンケート調査で 1000 人から回答を得た。このうち 530 人が支持すると答えた。過半数が内閣を支持していると言えるか。有意水準 1%で検定せよ。
(2)インフルエンザの予防接種をしていない人が、ある一定期間に 1 万人あたり 100 人が発病した。予防接種を行った 1000 人について、同じ期間に発病したか調査する予定だ。有意水準1%で検定し予防接種が有効であると結論するためには、発病者が 1000 人中何人以下であればよいか。

38. Aさんは土日に雨が多いと感じ、過去100週間の自分の地域の曜日別の降雨日（日降水量が1ミリメートル以上であった日）の日数を調べた。そうすると、曜日別の降雨日数は月曜日から日曜日の順で 32, 30, 22, 27, 24, 43, 39 であった。確かに土日の日数が多い。このデータから有意水準 5%で判断して、降雨日に曜日別の差があると言えるか、以下の方法で検定せよ。曜日別の降雨日数 $X_i\ (i=1,2,3,\ldots,k)$ は多項分布に従うとみなす。そこで検定統計量として、$\chi_0^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{(X_i-E)^2}{E}$ を用い、これは自由度 $k-1$ の χ^2-分布に従うことになる。ここで E は期待度数である（教科書 p.124 参照）。